数学分析笔记 (2)

第 9 章 数项级数

定理

调和级数的 **余和数列**.

定理 9.1.1 (级数收敛的必要条件) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则其通项构成的数列 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

定理 9.1.2 (线性性) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B,\ \alpha.\ \beta$ 是两个常数, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B.$$

定理 9.1.3 (加法结合律) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛, 且其和不变.

定义 9.2.1 在有界数列 $\{x_n\}$ 中, 若存在它的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$, 则称 ξ 为数列 $\{x_n\}$ 的一个 **极限点**.

定理 9.2.1 ⭐ 有界数列 $\{x_n\}$ 的极限点的集合 E 的上确界 H 和下确界 h 均属于 E, 即

$$H = \max E,\ h = \min E.$$

- 无界亦成立.

定义 9.2.2 **上极限** $H = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, **下极限** $h = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

定理 9.2.2 ⭐ 有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

- 无界亦成立.

定理 9.2.3 ⭐ 设 $\{x_n\}$ 是有界数列, 则

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = H$ 的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0$,
   1. $\exists N, \forall n > N : x_n < H + \varepsilon$.
   2. $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $x_n > H - \varepsilon$.
2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = h$ 的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0$,
   1. $\exists N, \forall n > N : x_n > H - \varepsilon$.
   2. $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $x_n < H + \varepsilon$.

定理 9.2.4 ⭐ 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两数列, 则

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$.

   $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \ge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\varliminf_{n\to\infty}y_n.$$

(要求上述诸式的右端不是待定型)

定理 9.2.5 ⭐ 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两数列, 则

1. 若 $x_n\geq 0, y_n\geq 0$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)\leq\varlimsup_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)\geq\varliminf_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}y_n.$$

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in(0,+\infty)$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}y_n.$$

(要求上述诸式的右端不是待定型)

对于 $\{x_n\}$, 记

$$\begin{aligned}
b_n&=\sup\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}=\sup_{k>n}\{x_k\}\\
a_n&=\inf\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}=\inf_{k>n}\{x_k\}\\
H^*&=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k>n}\{x_k\}\\
h^*&=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k>n}\{x_k\}
\end{aligned}$$

定理 9.2.6 ⭐ H^* 是 $\{x_n\}$ 的最大极限点, h^* 是 $\{x_n\}$ 的最小极限点, 即

$$H^*=\max E=\varlimsup_{n\to\infty}x_n,\quad h^*=\min E=\varliminf_{n\to\infty}x_n.$$

定理 9.3.1 (正项级数的收敛原理) 正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有上界.

定理 9.3.2 (比较判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数, 若 $\exists A>0:x_n\leq Ay_n,\ n=1,2,\cdots$, 则

1. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也收敛.
2. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 也发散.

定理 9.3.2' (比较判别法的极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=l$, 则

1. 若 $0\leq l<+\infty$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也收敛.
2. 若 $0<l\leq+\infty$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也发散.

定理 9.3.3 (Cauchy 判别法) ⭐ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是正项级数, $r=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$, 则

1. 当 $r<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

2. 当 $r > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.
3. 当 $r = 1$ 时, 级数可能收敛可能发散.

定理 9.3.4 (d' Alembert 判别法) ⭐ 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\ (x_n \neq 0)$ 是正项级数, 则

1. 当 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \overline{r} < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.
2. 当 $\underline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.
3. 当 $\overline{r} \geq 1$ 或 $\underline{r} \leq 1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散.

引理 9.3.1 ⭐ 设 $\{x_n\}$ 是正项数列, 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

- 能用 d' Alembert 判别法判定的敛散情况, 一定能用 Cauchy 判别法判定, 反之不亦然. 二者本质是比较判别法.

定理 9.3.5 (Rabbe 判别法) ⭐ 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\ (x_n \neq 0)$ 是正项级数, $\lim_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = r$, 则

1. 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.
2. 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

定理 9.3.5' (Bertrand 判别法) 🌙 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\ (x_n \neq 0)$ 是正项级数, $\lim_{n\to\infty} \left[n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \ln n = r$,

则判断标准同上.

设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 非负且 Riemann 可积,

取一单调增加趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\} : a = a_1 < a_2 < \cdots$, 令 $u_n = \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

定理 9.3.6 (积分判别法) ⭐ 反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散于 $+\infty$, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 当 $f(x)$ 单调减少时, 取 $a_n = n$, 则反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与正项级数 $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)\ (N = [a] + 1)$ 同时收敛或同时发散.

- 由反常积分的收敛性判断级数的收敛性.
- 由级数的收敛性判断反常积分的收敛性.
- 若 $f(x) \geq 0$ 不恒成立,则由反常积分的收敛性仍可得到级数的收敛性, 但反之不亦然.

定理 9.4.1 (级数的 Cauchy 收敛原理) ⭐ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$:

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon$$

对一切 $m > n > N$ 成立.

- 当 $m=n+1$ 时, 即为必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
- $\forall \varepsilon>0, \forall p\in\mathbb{N}^+, \exists N(\varepsilon,p): \forall n>N, |x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon$ 无法推出级数收敛.

定义 9.4.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\ (u_n>0)$ 称为 **交错级数**, 若 $|u_n|$ 单调减少且收敛于 0, 则称为 **Leibniz 级数**.

定理 9.4.2 (Leibniz 判别法) Leibniz 级数必定收敛.

1. Leibniz 级数满足 $0 \le \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \le u_1$.
2. 余和 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ 满足 $|r_n| \le u_{n+1}$.

引理 9.4.1 (Abel 变换; 分部求和公式) ⭐ 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两数列, 记 $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k} b_i\ (k=1,2,\cdots)$, 则

$$\sum_{k=1}^{P} a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{P-1}(a_{k+1}-a_k)B_k.$$

引理 9.4.2 (Abel 引理) ⭐ 设 $\{a_k\}$ 为单调数列, $\{B_k\}$ $(B_k=\sum\limits_{i=1}^{k} b_i, k=1,2,\cdots)$ 为有界数列, 即 $\exists M>0, \forall k: |B_k|\le M$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{P} a_k b_k\right| \le M(|a_1|+2\,|a_p|).$$

定理 9.4.3 (级数的 A-D 判别法) ⭐ 若下列两个条件之一满足, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛:

1. (**Abel 判别法**) $|a_n|$ 单调有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛;
2. (**Dirichlet 判别法**) $|a_n|$ 单调趋于 0, $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right\}$ 有界.

- Leibniz 判别法和 Abel 判别法均可看作 Dirichlet 判别法的特例.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是任意项级数, 令

$$x_n^+ = \frac{|x_n|+x_n}{2} = \begin{cases} x_n, & x_n>0, \\ 0, & x_n\le 0, \end{cases}$$
$$x_n^- = \frac{|x_n|-x_n}{2} = \begin{cases} -x_n, & x_n<0, \\ 0, & x_n\ge 0. \end{cases}$$

定理 9.4.4 ⭐ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都收敛; 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都发散到 $+\infty$.

加法交换律

定理 9.4.5 ⭐ 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛, 则它的 **更序级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n'$ 也绝对收敛, 且和不变, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

定理 9.4.6 (Riemann) ⭐ 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛, 则 $\forall a \in [-\infty, +\infty]$, 必定存在 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n = a$.

级数的乘法

级数的 **Cauchy 乘积**.

对于正方形排列所得的乘积, 只要 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

定理 9.4.7 ⭐ 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则将 $a_i b_j$ 按任一方式排列求和而成的级数也绝对收敛, 且其和等于 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

无穷乘积

定义 9.5.1 如果部分积数列 $\{P_n\}$ 收敛于一个非零有限数 P, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 且称 P 为它的积. 如果发散或收敛于 0, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散.

定理 9.5.1 ⭐ 如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 则

1. $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.
2. $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n = 1$. 🌙

Wallis 公式 ⭐

设 $p_n = 1 - \dfrac{1}{(2n)^2}$, 记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$, 则

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$
$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = \frac{[(2n-1)!!]^2}{[(2n)!!]^2} \cdot (2n+1) = \frac{2}{\pi} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}},$$
$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \cdots$$
$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{n\pi} \quad (n \to +\infty)$$

Viete 公式 ⭐

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$, 即得

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\cdots$$

无穷乘积与无穷级数

定理 9.5.2 ⭐ 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛.

推论 9.5.1 ⭐ 设 $a_n>0$ (或 $a_n<0$), 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

- 即对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 有：$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+x_n)$ 收敛 $\quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

推论 9.5.2 ⭐ 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

- 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=+\infty$，则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于 0.
- 当无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 可能都发散.

定义 9.5.2 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 绝对收敛时，无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ **绝对收敛**.

定理 9.5.3 ⭐ 设 $a_n>-1,\ n=1,2,\cdots$,则下述命题等价:

1. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛.
2. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛.
3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

Stirling 公式 ⭐

令 $b_n=\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, 则 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\mathrm{e}^{1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=1-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}-1\right)$ 是收敛的定号级数, 故无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}$ 收敛于非零实数, $\lim_{n\to\infty}b_n=b_1\prod_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}$ 也收敛于非零实数, 故

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}=\sqrt{2\pi}$$

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\quad(n\to+\infty)$$

巴塞尔问题

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

笔记

- 可利用级数收敛的必要条件证明数列收敛于 0.
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0.$
- 若由 Cauchy 判别法或 d' Alembert 判别法判断出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也发散.
- 正弦级数的有界性

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}.$$

- 等价无穷大

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{n\pi}$$
$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}$$

- 一些无穷乘积

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdots\cdot$$
$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots\cdot$$
$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

- 若 $\{x_n\}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(x_n-x_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛. ⭐
- 若 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>0$, 则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nx_n$ 收敛. ⭐
- 由柯西乘积数归得: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=(1-q)^{-k}$. ⭐

例题

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\pi$ 收敛.
2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散, $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, 则
   1. 存在发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$.
   2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}} = \frac{2}{x_1}-\frac{1}{S_n}$ 收敛.
3. 无穷乘积

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdot\cdots\cdot(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\cdots\cdot(\alpha+n)} = 0 \quad (0<\beta<\alpha)$$

4. 设 $|q|<1$, 则

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}$$

第 10 章 函数项级数

定理

定义 10.1.1 设 $u_n(x)$ 在 $\mathbb{E}$ 上定义, 对于任意固定的 $x_0\in\mathbb{E}$, 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 x_0 收敛, x_0 称为其 **收敛点**. 收敛点全体构成的集合 $\mathbb{D}$ 称为 **收敛域**.

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上 **点态收敛** 于 **和函数** $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 即 **部分和函数** 的极限.

逐项求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{n\to\infty}, \quad \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}.$

逐项求导: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$

逐项积分: $\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b, \quad \int_a^b\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b.$

定义 10.1.2 设 $\{S_n(x)\}(x\in\mathbb{D})$ 是一函数序列, 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n>N(\varepsilon)$ 时,

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in\mathbb{D}$ 成立, 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上 **一致收敛** 于 $S(x)$, 记为 $S_n(x)\overset{\mathbb{D}}{\rightrightarrows}S(x)$.

同样的有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于 $S(x)$. 即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall x\in\mathbb{D}: \left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right| = |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

推论 10.1.1 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛, 则函数序列 $\{u_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于 $u(x) \equiv 0$.

定义 10.1.3 若对于任意给定的闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{D}$, 函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上 **内闭一致收敛** 于 $S(x)$.

定理 10.1.1 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 $\mathbb{D}$ 上点态收敛于 $S(x)$, 定义 $S_n(x)$ 与 $S(x)$ 的距离为

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in \mathbb{D}} |S_n(x) - S(x)|.$$

则 $\{S_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是 $\lim_{n \to \infty} d(S_n, S) = 0$.

定理 10.1.2 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 $\mathbb{D}$ 上点态收敛于 $S(x)$, 则 $|S_n(x)|$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致连续收敛于 $S(x)$ 的充要条件是: 对任意数列 $|x_n|, x_n \in \mathbb{D}$, 成立

$$\lim_{n \to \infty} (S_n(x_n) - S(x_n)) = 0.$$

一致收敛的判别

定理 10.2.1 (函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛原理) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛的充要条件是, $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N, \forall x \in \mathbb{D}$

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots u_m(x)| < \varepsilon.$$

定理 10.2.2 (Weierstrass 判别法) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)(x \in \mathbb{D})$ 的每一项 $u_n(x)$ 满足

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad x \in \mathbb{D},$$

并且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛.

- 此时不仅一致收敛, 还在绝对意义上一致收敛.

定理 10.2.3 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)(x \in \mathbb{D})$ 满足如下两个条件之一, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛.

1. (**Abel 判别法**) 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x \in \mathbb{D}$ 关于 n 是单调的, 且 $\{a_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致有界:

$$|a_n(x)| \leq M, \quad x \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}^+,$$

   同时, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛.

2. (**Dirichlet 判别法**) 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x \in \mathbb{D}$ 关于 n 是单调的, 且 $\{a_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于 0; 同时, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列在 $\mathbb{D}$ 上一致有界:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leq M, \quad x \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}^+.$$

一致收敛级数的性质

定理 10.2.4 (连续性定理) 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上也连续.

- 即可以逐项求极限, $\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} S_n(x)$.

定理 10.2.4' (逐项求极限定理) 设对每个 n, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 这时, $\forall x_0 \in [a,b]$,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

定理 10.2.5 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 10.2.5' (逐项积分定理) 设对每个 n, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 10.2.6 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 满足

1. $S_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数.
2. $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$.
3. $\{S_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\sigma(x)$.

则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x) = \sigma(x)$. 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x).$$

定理 10.2.6' (逐项求导定理) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足

1. $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\sigma(x)$.

则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x).$$

定理 10.2.7 (Dini 定理) 设函数序列 $|S_n(x)|$ 在闭区间 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, 如果

1. $S_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
2. $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
3. $\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调.

则 $[S_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

定理 10.2.7' 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, 如果

1. $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
2. $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
3. 对任意固定的 $x \in [a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是正项级数或负向级数.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

处处不可导的连续函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(10^n x)}{10^n}$.

幂级数

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 令 $A=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$, 定义 **收敛半径**

$$R=\begin{cases}+\infty, & A=0,\\ \dfrac{1}{A}, & A\in(0,+\infty),\\ 0, & A=+\infty.\end{cases}$$

定理 10.3.1 (Cauchy-Hadamard 定理) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x|<R\ (R>0)$ 时绝对收敛; 当 $|x|>R$ 时发散.

定理 10.3.2 (d' Alembert 判别法) 如果对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 成立

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=A,$$

则此幂级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{A}$.

- 即不等式 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 的推论.

Abel 第一定理 设 $x_0=0$, 如果幂级数在点 ξ 收敛, 则当 $|x|<|\xi|$ 时幂级数绝对收敛. 如果幂级数在点 η 发散, 则当 $|x|>|\eta|$ 时幂级数发散.

定理 10.3.3 (Abel 第二定理) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 上内闭一致收敛.
2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$ 收敛, 则它在任意闭区间 $[a,R]\subset(-R,R]$ 上一致收敛.

- 即幂级数在包含于收敛域中的任意闭区间上一致收敛.

定理 10.3.4 (和函数的连续性) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则和函数在 $(-R,R)$ 上连续; 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$ 收敛, 则和函数在 $x=R$ 左连续.

定理 10.3.5 (逐项可积性) 设 a,b 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域中任意二点, 则

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n\,\mathrm{d}x,$$

且逐项积分所得幂级数与原幂级数具有相同的收敛半径.

- 收敛半径相同, 但收敛域可能扩大.

定理 10.3.6 (逐项可导性) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则它在 $(-R, R)$ 上可以逐项求导, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

且逐项求导所得幂级数的收敛半径也是 R.

- 收敛半径相同, 但收敛域可能缩小.

Taylor 级数与余项公式

定理 10.4.1 (积分形式的余项公式) 设 $f(x)$ 在 $O(x_0, r)$ 上任意阶可导, 则

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), \quad x \in O(x_0, r) \\
r_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t \quad (\text{积分形式的余项公式}) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\text{Lagrang 余项}) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1} \quad (\text{Cauchy 余项})
\end{aligned}$$

定理 10.5.1 (Weierstrass 第一逼近定理) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则它的 **Bernstein 多项式** 序列 $\{B_n(f, x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 f.

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Bernstein 多项式的性质

1. 线性性: $B_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha B_n(f, x) + \beta B_n(g, x)$.
2. 单调性: 若 $f(t) \geq g(t)$ 恒成立, 则 $B_n(f, x) \geq B_n(g, x)$.
3. $B_n(1, x) = 1$.

   $B_n(t, x) = \dfrac{1}{n^1} n^{\underline{1}} x^1$.

   $B_n(t^2, x) = \dfrac{1}{n^2}(n^{\underline{2}} x^2 + n^{\underline{1}} x^1)$.

   $B_n(t^3, x) = \dfrac{1}{n^3}(n^{\underline{3}} x^3 + 3n^{\underline{2}} x^2 + n^{\underline{1}} x^1)$.

   $B_n(t^4, x) = \dfrac{1}{n^4}(n^{\underline{4}} x^4 + 6n^{\underline{3}} x^3 + 7n^{\underline{2}} x^2 + n^{\underline{1}} x^1)$.

   $B_n(t^5, x) = \dfrac{1}{n^5}(n^{\underline{6}} x^6 + 10n^{\underline{4}} x^4 + 25n^{\underline{3}} x^3 + 15n^{\underline{2}} x^2 + n^{\underline{1}} x^1)$.

   $B_n(t^6, x) = \dfrac{1}{n^6}(n^{\underline{7}} x^7 + 15n^{\underline{6}} x^6 + 65n^{\underline{4}} x^4 + 90n^{\underline{3}} x^3 + 31n^{\underline{2}} x^2 + n^{\underline{1}} x^1)$.

   找到了比较方便的递推式, 希望没有算错.

- 可以用有理系数多项式逼近.

笔记

- $f(x)=x^a(1-x)^b\ (0<x<1)$ 在 $x=\dfrac{a}{a+b}$ 处取到最值 $\dfrac{a^ab^b}{(a+b)^{a+b}}$.
- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 和它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)$ 都收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\right)$.
- 幂级数展开

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad \begin{cases}x\in(-1,1), & \alpha\le -1,\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & \alpha>0.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\sin x&=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in\mathbb{R}\\
\cos x&=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R}\\
\arcsin x&=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in(-1,1)\\
\arccos x&=\frac{\pi}{2}-\arcsin x,\quad x\in(-1,1)\\
\sinh x&=\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in\mathbb{R}\\
\cosh x&=\sum_{n=0}^{\infty}\cos^2\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

- 和函数

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}=\int_0^t-\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

- 巴塞尔问题

$$\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2\cdot(2n)!}.$$

-

例题

1. (不) 一致收敛的例子
   1. $S_n(x)=x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛于 $S(x)=0$.
   2. $S_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 在 $[0,a]$ 一致收敛, 但在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.
   3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.
   4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^\alpha\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上当且仅当 $\alpha>0$ 时一致收敛.

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

   如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} x^n$.

6. 设 $\{a_n\}$ 单调收敛于 0, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛.

2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1. (考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$ 并用 d' Alembert 判别法)
3. 设 $P_n(x) = 0, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则 $\{P_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $|x|$.

第 11 章 Euclid 空间上的极限和连续

Euclid 空间上的距离与极限

向量空间: 定义加法与数乘.

$\mathbb{R}^n$ 上的 **内积**: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

1. (**正定性**) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \geq 0$, 而 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
2. (**对称性**) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$.
3. (**线性性**) $\langle \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \mu \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$.
4. (**Schwarz 不等式**) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle$.

定义 11.1.1 距离 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. **Euclid 范数** $\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$.

定理 11.1.1 距离满足一下性质:

1. (**正定性**) $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 时取等.
2. (**对称性**) $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$.
3. (**三角不等式**) $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|$.

领域, **极限**, **收敛**, **发散**, **有界集**.

开集与闭集

以邻域 $O(\boldsymbol{x}, \delta)$ 判断: **内点**, **内部** S^o, **外点**, **边界点**, **边界** ∂S, **孤立点**, **聚点**.

定理 11.1.2 $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$.

定理 11.1.3 $\boldsymbol{x}$ 是点集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的聚点的充要条件是: 存在点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足 $\boldsymbol{x} \in S,\ \boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}$, 使得 $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$.

定义 11.1.5 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 若 S 中的每一个点都是它的内点, 则称 S 为 **开集**; 若 S 中包含了它的所有聚点, 则称 S 为 **闭集**. S 与它的聚点全体 S' 的并集称为 S 的 **闭包**, 记为 $\overline{S}$.

定理 11.1.4 $\mathbb{R}^n$ 上的点集 S 为闭集的充要条件是 S^c 是开集.

引理 11.1.1 (De Morgan 公式) 设 $\{S_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组 (有限或无限多个) 子集, 则

1. $\left(\bigcup_{\alpha} S_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha} S_\alpha^c$.

2. $\left(\bigcap_{\alpha} S_{\alpha}\right)^{c}=\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}^{c}$.

定理 11.1.5

1. 开集之并是开集.
2. 闭集之交是闭集.
3. 有限个开集之交是开集.
4. 有限个闭集之并是闭集.

- 开集与并集之差是开集, 并集与开集之差是并集.

定理 11.1.6 (闭矩形套定理) 设 $\Delta_k=[a_k,b_k]\times[c_k,d_k]\ (k=1,2,\cdots)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上一列闭矩形, 如果

1. $\Delta_{k+1}\subset\Delta_k$.
2. $\sqrt{(b_k-a_k)^2+(d_k-c_k)^2}\to 0\ (k\to\infty)$.

则存在唯一的点 $\boldsymbol{a}=(\xi,\eta)\in\bigcap\limits_{k=1}^{n}\Delta_k$, 且

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=\xi,\quad \lim_{k\to\infty}c_k=\lim_{k\to\infty}d_k=\eta.$$

定理 11.1.6' (Cantor 闭区域套定理) 设 $\{S_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非空闭集序列, 满足

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_k\supset S_{k+1}\supset\cdots,$$

以及 $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}S_k=0$, 则存在唯一点属于 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}S_k$. 其中

$$\operatorname{diam}S=\sup\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\mid \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S\},$$

称为 S 的直径.

定理 11.1.7 (Bolzano—Weierstrass 定理) $\mathbb{R}^n$ 上的有界点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 中必有收敛子列.

推论 11.1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的有界无限点集至少有一个聚点.

定义 11.1.6 若 $\mathbb{R}^n$ 上的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足:

$$\forall\varepsilon>0,\exists K\in\mathbb{N}^{+},\forall k,l>K:|\boldsymbol{x}_l-\boldsymbol{x}_k|<\varepsilon,$$

则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为 **基本点列** (或 **Cauchy 点列**).

定理 11.1.8 (Cauchy 收敛原理) $\mathbb{R}^n$ 上的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛的充要条件是: $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为基本点列.

定义 11.1.7 设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 如果 $\mathbb{R}^n$ 中的一组开集 $\{U_\alpha\}$ 满足 $\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha\supset S$, 那么称 $\{U_\alpha\}$ 为 S 的一个 **开覆盖**. 如果 S 的任意一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中总存在一个有限子覆盖, 即存在 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个开集 $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{P}$ 满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{P}U_{\alpha_i}\supset S$, 则称 S 为 **紧集**.

定理 11.1.9 (Heine—Borel 定理) $\mathbb{R}^n$ 上的点集 S 是紧集的充要条件为: 它是有界闭集.

- 紧集之交与紧集之并仍是紧集.

定理 11.1.10 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 那么以下三个命题等价:

1. S 是有界闭集.
2. S 是紧集.
3. S 的任一无限子集在 S 中必有聚点.

- Euclid 空间上的基本定理：Cantor 闭区间套定理、Bolzano—Weierstrass 定理、Cauchy 收敛原理和 Heine—Borel 定理，它们是相互等价的.

n 重极限, 累次极限

- 二次极限存在, 二重极限不一定存在.
- 二重极限存在, 二次极限可能都存在, 可能有一个不存在, 也可能都不存在.
- 两个极限运算不一定可以交换次序.

定理 11.2.1 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$, 且当 $x\neq x_0$ 时存在极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$, 那么

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

- 注意条件是二重极限存在.
- 若二重极限和两个二次极限都存在, 则极限运算可以交换次序.

向量值函数 (多元函数组)

定理 11.2.3 如果 g 在 D 上连续, f 在 Ω 上连续, 那么复合映射 $f\circ g$ 在 D 上连续.

- $f+g$ 与 $\langle f,g\rangle$ 也是连续的. 注意到

$$|\langle f(x),g(x)\rangle-\langle f(x_0),g(x_0)\rangle|=|\langle f(x)-f(x_0),g(x)\rangle+\langle f(x_0),g(x)-g(x_0)\rangle|.$$

连续, 一致连续.

定理 11.3.1 连续映射将紧集映射称紧集.

定理 11.3.2 (有界性定理) 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, f 是 K 上的连续函数, 则 f 在 K 上有界.

定理 11.3.3 (最值定理)

定理 11.3.4 (一致连续性定理) 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $f:K\to\mathbb{R}^m$ 为连续映射, 则 f 在 K 上一致连续.

定义 11.3.3 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点集, 若连续映射 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ 的值域全部落在 S 中, 即 $\gamma([0,1])\subset S$, 则称 γ 为 S 中的 **道路**, $\gamma(0)$ 与 $\gamma(1)$ 分别称为道路的 **起点** 与 **终点**.

若 S 中任意两点之间都存在道路, 则称 S 是 **(道路) 连通** 的, 且称为 **连通集**.

连通的开集称为 **(开) 区域**, 其闭包称为 **闭区域**.

定理 11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

推论 11.3.1 连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理 11.3.6 (中间值定理)

笔记

- 内部 S^o, 边界 ∂S, 聚点集 S', 闭包 $\overline{S}$.
- 开集的所有点都是聚点.
- 所有内点组成的点集是开集.
- 闭包是闭集.
- 由 $\sum\limits_{i=1}^n (a_i-tb_i)^2\geq 0$ 可推出:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=n}^n b_i^2}.$$

- 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为连续映射, 则对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意子集 A 成立

$$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}.$$

- 设 f 是有界开区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的一致连续函数, 则可将 f 连续延拓到 D 的边界上, 且 f 在 D 上有界.

例题

1. 设二元函数 $f(x,y)$ 在开集 $D\subset\mathbb{R}^2$ 内对于变量 x 是连续的, 对于变量 y 满足 **Lipschitz 条件**:

$$\left|f(x,y')-f(x,y'')\right|\le L\left|y'-y''\right|,$$

其中 L 为 Lipschitz 常数, 则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

第 12 章 多元函数的微分学

定理

定理 12.1.1 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为开集, $(x_0,y_0)\in D$ 为一顶点. 如果函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 在 (x_0,y_0) 可微, 那么对于任一方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, f 在 (x_0,y_0) 点沿方向 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

定理 12.1.2 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的某个邻域上存在偏导数, 并且偏导数在该点连续, 那么 f 在该点可微.

方向导数的梯度表述

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{v}}(x_0,y_0)=\boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{v}=\|\boldsymbol{\nabla}f(x_0,y_0)\|\cdot\cos(\boldsymbol{\nabla}f,\boldsymbol{v}).$$

梯度的性质

1. $\boldsymbol{\nabla}c=0.$
2. $\boldsymbol{\nabla}(\alpha f+\beta g)=\alpha\boldsymbol{\nabla}f+\beta\boldsymbol{\nabla}g.$
3. $\boldsymbol{\nabla}(f\cdot g)=f\cdot\boldsymbol{\nabla}g+g\cdot\boldsymbol{\nabla}f.$
4. $\boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\cdot\boldsymbol{\nabla}f-f\cdot\boldsymbol{\nabla}g}{g^2}.$

定理 12.1.3 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 连续, 那么 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的 **Jacobi 矩阵**: $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^0)\equiv\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)\equiv\boldsymbol{J_f}(\boldsymbol{x}^0)=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^0)\right)_{m\times n}.$

$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)^{\mathrm{T}}.$

定理12.1.4 向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点可微的充要条件是它的坐标分量函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在 $\boldsymbol{x}^0$ 点可微. 此时成立微分公式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^0)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

- 向量值函数连续、可导和可微，等价于它的每一个坐标分量函数连续、可导、可微.

定理 12.2.1&2&3 (链式法则) 设 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}^0\subset D_g$ 点可导, f 在 $\boldsymbol{y}^0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)$ 点可微, 则复合函数及其偏导数为

$$z = f \circ \boldsymbol{g} = f[y_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), y_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, y_m(n_1, n_2, \cdots, n_)]$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_z(\boldsymbol{x}^0) &= \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}, \frac{\partial z}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial y_m}\right)_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

更一般地:

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}).$$

一阶全微分的形式不变性.

凸区域 $\forall \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in D, \forall \lambda \in [0,1] : \boldsymbol{x}_0 + \lambda(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) \in D.$

定理 12.3.1 (中值定理) ⭐ 若二元函数在凸区域可微, 则

$$\exists \theta \in (0,1) : f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y.$$

推论 12.3.1 如果二元函数在某区域 (无需凸区域) 的偏导恒为零, 则在此区域为常值函数.

定理 12.3.2 (n 元函数的中值定理)

定理 12.3.3 (Taylor 公式) ⭐ 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域 $U = O((x_0, y_0), r)$ 上具有 $k+1$ 阶连续偏导, 则对于 U 内每一点 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 都成立

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) &+ \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \\ &\frac{1}{2!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \\ &\frac{1}{k!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0) + R_k, \end{aligned}$$

其中 $R_k = \dfrac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x \dfrac{\partial}{\partial x} + \Delta y \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \quad (0 < \theta < 1)$ 称为 **Lagrange 余项**.

注: 构造辅助函数 $\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, 通过一元函数的泰勒公式推导.

推论 12.3.2 带 **Peano 余项**的 Taylor 公式, 即余项为 $o\left(\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^k\right)$.

中心差商 ⭐

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx \frac{f\left(x + \frac{h}{2}, y\right) - f\left(x - \frac{h}{2}, y\right)}{h}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &\approx \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x + \frac{h}{2}, y\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\left(x - \frac{h}{2}, y\right)\right] \\ &\approx \frac{f(x+h, y) - 2f(x,y) + f(x-h, y)}{h^2} \end{aligned}$$

五点差分公式 ⭐

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)\approx \Delta_h f(x,y)\\
\equiv\ &\frac{f(x+h,y)+f(x,y+h)+f(x-h,y)+f(x,y-h)-4f(x,y)}{h^2}.
\end{aligned}
$$

其截断误差为 $O(h^2)$.

定理 12.3.4 n 元函数的 Taylor 公式.

定理 12.4.1 (一元隐函数存在定理) 若二元函数 $F(x,y)$ 满足条件:

1. $F(x_0,y_0)=0$.
2. 在闭矩形 $D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ 上, $F(x,y)$ 连续, 且具有连续偏导.
3. $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

那么

1. 在点 (x_0,y_0) 附近可从函数方程 $F(x,y)=0$ 中唯一确定隐函数 $y=f(x)$, 它满足 $F(x,f(x))=0$, $y_0=f(x_0)$.
2. 隐函数 $y=f(x)$ 在 $x\in O(x_0,\rho)$ 上连续.
3. 隐函数 $y=f(x)$ 在 $x\in O(x_0,\rho)$ 上具有连续的导数, 且

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.
$$

定理 12.4.2 (多元隐函数存在定理)

定理 12.4.3 (多元向量值隐函数存在定理)

$$
\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x,y)\\ g(x,y)\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{pmatrix}
$$

定理 12.4.4 m 个 $n+m$ 元函数确定的 n 个隐函数的偏导公式.

Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

定理 12.4.5 (逆映射定理)

推论 ⭐ 一元函数反函数求导公式的推广.

$$
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1.
$$

定理 12.4.6 ⭐ 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开集, 且映射 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbb{R}^2$ 在 D 上具有连续导数. 如果 $\boldsymbol{f}$ 的 Jacobi 行列式在 D 上恒不为零, 那么 D 的像集 $\boldsymbol{f}(D)$ 是开集.

空间曲线的参数方程, 光滑曲线, 切向量, 法平面, 张成的平面

定理 12.5.1 曲线 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$ 在 P_0 点的法平面就是 $\nabla F(P_0)$ 和 $\nabla G(P_0)$ 张成的过 P_0 的平面.

无条件极值

定理 12.6.1 (必要条件) 设 $\boldsymbol{x}_0$ 为函数 f 的极值点, 且 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可偏导, 则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的各个一阶偏导数都为零, 即

$$f_{x_1}(\boldsymbol{x}_0)=f_{x_2}(\boldsymbol{x}_0)=\cdots f_{x_n}(\boldsymbol{x}_0)=0.$$

定理 12.6.2 (极值点判别法) 设 (x_0,y_0) 为 f 的驻点, f 在 (x_0,y_0) 附近具有二阶连续偏导数, 记

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{xy}(x_0,y_0),\ C=f_{yy}(x_0,y_0),$$
$$H=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

1. 当 $H>0$ 时, $A>0$ 则取到极小值, $A<0$ 则取到极大值.
2. 当 $H<0$ 时, 非极值.

定理 12.6.3 (多元函数极值点判别法) 当二次型

$$g(\zeta)=\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_ix_j}(\boldsymbol{x}_0)\zeta_i\zeta_j$$

1. 正定时, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极小值;
2. 负定时, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极大值;
3. 不定时, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是极值.

推论 12.6.1 记 $a_{ij}=f_{x_ix_j}(\boldsymbol{x}_0)$, 定义 f 的 k 阶 **Hessian 矩阵**

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

1. 若 $\det \boldsymbol{A}_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 则二次型 $g(\xi)$ 是正定的, 此时为极小值;
2. 若 $(-1)^k\det \boldsymbol{A}_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 则二次型 $g(\xi)$ 是负定的, 此时为极大值.

最小二乘法, 拟合曲线 (经验公式), "牧童" 经济模型.

条件极值, 目标函数, 约束条件, Lagrange 函数与乘数, Lagrange 乘数法

定理 12.7.1 (条件极值的必要条件) 若点 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 满足约束条件的条件极值点, 则必存在 m 个常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, 使得在 $\boldsymbol{x}_0$ 点成立

$$\boldsymbol{\nabla} f=\lambda_1\boldsymbol{\nabla} g_1+\lambda_2\boldsymbol{\nabla} g_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\nabla} g_m.$$

构造 Lagrange 函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

则条件极值点就在

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k}=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}-\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k}=0, \\ g_l=0. \end{cases}$$

的所有解对应的点中.

定理 12.7.2 当且仅当下述方阵为正定 (负定) 矩阵时, $\boldsymbol{x}_0$ 为满足约束条件的条件极小 (大) 值点.

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_k\partial x_l}(\boldsymbol{x}_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\right)_{m\times m}.$$

笔记

注意事项

- 求导过程中可以不展开某些变量, 但要注意变量与其它变量是否有关系.

基本概念的相互关系

- 可微
  - 连续, 且可偏导.
  - 方向偶数存在.
  - 链式法则成立.
- 偏导连续
  - 可微.
- 混合偏导连续
  - 混合偏导相等.

计算思路

- **求曲线的切线与法平面**
  - 参数方程 $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$.
    - $\boldsymbol{s} = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
  - 平面交线 $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$.
    - 利用 $\boldsymbol{s} \perp \nabla F$, $\boldsymbol{s} \perp \nabla G$.
    - $\boldsymbol{s} = \left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)$. ⭐
- **求曲面的法线与切平面**
  - 一般方程 $F(x, y, z) = 0$.
    - $\boldsymbol{s} = (F_x, F_y, F_z)$.
  - 参数方程 $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$
    - 利用 $z = z(u(x, y), v(x, y))$.
    - $\boldsymbol{s} = \left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$. ⭐

特殊曲面

- **证明曲面为柱面**
  - 证明思路
    - 在任意一点的切平面平行于一条特定直线.
    - 在任意一点的法向量垂直于一个定向量. ⭐
  - 例子
    - $f(a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z) = 0$.
    - 特别的, $f(ax + by + cz) = 0$ 退化为平面, 且与 (a, b, c) 垂直.
- **曲面过顶点**
  - 若 F 为 k 次齐次方程, 即 $F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z)$, 则 $F(x, y, z) = 0$ 过原点.
  - 推论: $G\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right) = 0$ 或 $G^*\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{y}, \dfrac{x}{z}\right)$ 过原点.

一些结论

- **相交椭圆面积**

$$\begin{cases} Ax+By+Cz=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S=\pi abc\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}}.$$

- **求极值**
    - 设 $a>0,\ a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ 在约束条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ 下的最大值为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{aa_i}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{a_i}=\frac{a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}}{\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}$$

---

k 次齐次方程 $f(ax_1,ax_2,\cdots,ax_s)=a^nf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的欧拉公式为

$$\sum_{\alpha}^{s}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\cdot x_\alpha=nf.$$

且其逆命题成立.

推论: 每一项的偏导数都是 $n-1$ 次齐次函数, 即

$$\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\cdot x_\beta=(n-1)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}.$$

Hadamard 公式 设 n 元函数 f 具有连续偏导数, 则有

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1(y_i-x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}t.$$

注: 利用 $F(t)\equiv f(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})),\ F(1)-F(0)=\int_0^1F'(t)\,\mathrm{d}t.$

变换变量

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}.$$

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0, \quad \begin{cases} u=x+\lambda y, \\ v=x+\mu y. \end{cases}$$

例题

1. $\mathrm{d}^kf(ax+by+cz)=f^{(k)}(ax+by+cz)(a\,\mathrm{d}x+b\,\mathrm{d}y+c\,\mathrm{d}z)^k.$
2. 设 $y=f(x,t)$, 其中 t 是由 $F(x,y,t)=0$ 所确定的隐函数, 且 f 和 F 都具有连续偏导数, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$